

Álgebra II

Examen VIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra II

Examen VIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Daniel Muñoz Gómez

Granada, 2026

Asignatura Álgebra II.

Curso Académico 2025/2026.

Grado Doble Grado en Matemáticas y Física.

Grupo Único.

Profesor Aurora Inés del Río Cabeza.

Descripción Prueba intermedia I.

Fecha 20/04/2026.

Ejercicio 1 (1 punto). En las siguientes cuestiones responde “VERDADERO” o “FALSO” y haz un breve razonamiento para justificar tu respuesta. Cada respuesta correcta puntúa 0,1 puntos.

1. Si G es un grupo y para cada elemento $a \in G$ se verifica $a^2 = 1$, entonces G es un grupo abeliano.
2. El conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la operación

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0 \\ x/y & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es un grupo abeliano.

3. En un grupo de orden primo cada elemento, distinto del elemento neutro, es un generador.
4. Un subconjunto de un grupo G , que es cerrado para la operación de G , no necesariamente es un subgrupo.
5. Sea $H < G$ un subgrupo y $a \in G$, si $aH = H$, entonces $a \in H$.
6. Una aplicación inyectiva entre dos grupos es un monomorfismo.
7. Si $f : G \rightarrow H$ es un monomorfismo de grupos y G es abeliano, entonces, H es abeliano.
8. Sean $H_1, H_2 < G$ subgrupos de índices finitos y $[G : H_1]$ y $[G : H_2]$ son primos relativos, entonces $G = H_1 \vee H_2$.
9. Dos grupos finitos que tienen subgrupos propios isomorfos son necesariamente isomorfos.
10. Si en S_4 consideramos el subgrupo $H = \langle (1\ 3\ 4) \rangle$, entonces, los conjuntos cocientes de clases laterales por la derecha Hx y clases laterales por la izquierda xH son iguales.

Ejercicio 2 (1 punto). Considera el grupo $C_8 = \langle a \mid a^8 = 1 \rangle$. Calcula:

1. Todos los automorfismos de C_8 .
2. El orden de cada uno de los automorfismos de C_8 .
3. Identifica el grupo $\text{Aut}(C_8)$ con un grupo conocido.

Ejercicio 1 (1 punto). En las siguientes cuestiones responde “VERDADERO” o “FALSO” y haz un breve razonamiento para justificar tu respuesta. Cada respuesta correcta puntúa 0,1 puntos.

1. Si G es un grupo y para cada elemento $a \in G$ se verifica $a^2 = 1$, entonces G es un grupo abeliano.

VERDADERO. Si $a^2 = 1$ para todo $a \in G$, entonces cada elemento es su propio inverso ($a = a^{-1}$). Dados $a, b \in G$, se tiene:

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$$

Por lo tanto, G es abeliano.

2. El conjunto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la operación

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & \text{si } x > 0 \\ x/y & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es un grupo abeliano.

FALSO. La operación no es conmutativa. Por ejemplo, si tomamos $x = -1$ e $y = 2$:

$$x \cdot y = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Mientras que para $y \cdot x$, como $y = 2 > 0$:

$$y \cdot x = 2 \cdot (-1) = -2$$

Como $x \cdot y \neq y \cdot x$, no puede ser un grupo abeliano.

3. En un grupo de orden primo cada elemento, distinto del elemento neutro, es un generador.

VERDADERO. Sea G un grupo de orden primo p . Por el teorema de Lagrange, el orden de cualquier subgrupo de G debe dividir a p . Como p es primo, los únicos subgrupos posibles son el trivial $\{1\}$ y el propio G . Si tomamos cualquier elemento $a \in G$ distinto del elemento neutro ($a \neq 1$), el subgrupo generado $\langle a \rangle$ no es el trivial, por lo que obligatoriamente $\langle a \rangle = G$, haciendo de a un generador.

4. Un subconjunto de un grupo G , que es cerrado para la operación de G , no necesariamente es un subgrupo.

VERDADERO. Por ejemplo, en el grupo infinito $(\mathbb{Z}, +)$, el subconjunto de los enteros positivos \mathbb{Z}^+ es cerrado bajo la suma, pero no contiene el elemento neutro (0) ni los elementos inversos, por lo que no es un subgrupo.

5. Sea $H < G$ un subgrupo y $a \in G$, si $aH = H$, entonces $a \in H$.

VERDADERO. Como H es un subgrupo, contiene al elemento neutro $e \in H$. Por tanto, $a = ae \in aH$. Dado que por hipótesis $aH = H$, se concluye directamente que $a \in H$.

6. Una aplicación inyectiva entre dos grupos es un monomorfismo.

FALSO. No es cierto, puesto que puede no respetar la estructura de grupo. Por ejemplo, consideremos los grupos $G, H = (\mathbb{Z}, +)$ y la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow H \\ n &\longmapsto n + 1 \end{aligned}$$

Veamos que f es inyectiva:

$$f(n) = f(m) \implies n + 1 = m + 1 \implies n = m$$

Sin embargo, f no es un homomorfismo de grupos, puesto que:

$$f(n + m) = (n + m) + 1 \neq (n + 1) + (m + 1) = f(n) + f(m)$$

Por lo tanto, f es una aplicación inyectiva que no es un monomorfismo de grupos.

7. Si $f : G \rightarrow H$ es un monomorfismo de grupos y G es abeliano, entonces, H es abeliano.

FALSO. Sea $G = \{1\}$ (que es abeliano) y $H = S_3$ (que es no abeliano). La aplicación trivial $f : G \rightarrow H$ definida por $f(1) = \text{Id}$ es un homomorfismo inyectivo (monomorfismo), pero H no es abeliano.

8. Sean $H_1, H_2 < G$ subgrupos de índices finitos y $[G : H_1]$ y $[G : H_2]$ son primos relativos, entonces $G = H_1 \vee H_2$.

VERDADERO. Por las propiedades de los índices de subgrupos, se cumple que $[G : H_1 \cap H_2] \leq [G : H_1][G : H_2]$, dándose la igualdad si y solo si $G = H_1 H_2$ (que equivale a que el supremo o unión de subgrupos $H_1 \vee H_2$ sea todo G). Como los índices son primos relativos, se alcanza dicha igualdad, por lo que $G = H_1 \vee H_2$.

9. Dos grupos finitos que tienen subgrupos propios isomorfos son necesariamente isomorfos.

FALSO. Consideremos el grupo cíclico C_4 y el grupo de Klein V_4 . Ambos son grupos de orden 4 no isomorfos entre sí ($C_4 \not\cong V_4$). Sin embargo, ambos poseen subgrupos propios de orden 2 que son isomorfos a C_2 .

10. Si en S_4 consideramos el subgrupo $H = \langle (1\ 3\ 4) \rangle$, entonces, los conjuntos cocientes de clases laterales por la derecha Hx y clases laterales por la izquierda xH son iguales.

FALSO. Para ver que $xH \neq Hx$, basta comprobar que la conjugación de un elemento de H por x se sale del subgrupo H :

$$x(1\ 3\ 4)x^{-1} = (1\ 2)(1\ 3\ 4)(1\ 2)^{-1} = (1\ 2)(1\ 3\ 4)(1\ 2) = (2\ 3\ 4)$$

Dado que $(2\ 3\ 4) \notin H$, sabemos automáticamente que $xHx^{-1} \neq H$, y por lo tanto, $xH \neq Hx$.

Si calculamos explícitamente ambas clases laterales, la diferencia es evidente:

▪ **Clase por la izquierda:**

$$xH = (1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 2)(1\ 3\ 4), (1\ 2)(1\ 4\ 3)\} = \{(1\ 2), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 3\ 2)\}$$

▪ **Clase por la derecha:**

$$Hx = H(1\ 2) = \{(1\ 2), (1\ 3\ 4)(1\ 2), (1\ 4\ 3)(1\ 2)\} = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3)\}$$

Ejercicio 2 (1 punto). Considera el grupo $C_8 = \langle a \mid a^8 = 1 \rangle$. Calcula:

1. Todos los automorfismos de C_8 .

Sabemos que $\text{Aut}(C_8) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$ mediante el isomorfismo:

$$\varphi : \mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \rightarrow \text{Aut}(C_8), \quad k \mapsto f_k$$

donde el automorfismo f_k actúa elevando a la potencia k , es decir, $f_k(x) = x^k$ para todo $x \in C_8$.

Calculamos las unidades de \mathbb{Z}_8 (los coprimos con 8 menores que 8):

$$\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) = \{1, 3, 5, 7\}$$

Por tanto, hay exactamente 4 automorfismos en $\text{Aut}(C_8)$:

- $f_1(a) = a^1 = a$ (el automorfismo identidad)
- $f_3(a) = a^3$
- $f_5(a) = a^5$
- $f_7(a) = a^7$

2. El orden de cada uno de los automorfismos de C_8 .

Gracias al isomorfismo anterior, el orden de cada automorfismo f_k bajo la operación de composición de funciones es idéntico al orden del elemento k en el grupo multiplicativo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)$.

Calculamos los órdenes elevando al cuadrado cada elemento en \mathbb{Z}_8 :

- Para f_1 : $1^1 \equiv 1 \pmod{8}$. Su orden es **1**.
- Para f_3 : $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{8}$. Su orden es **2**.
- Para f_5 : $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{8}$. Su orden es **2**.
- Para f_7 : $7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{8}$. Su orden es **2**.

3. Identifica el grupo $\text{Aut}(C_8)$ con un grupo conocido.

Como $|\text{Aut}(C_8)| = 4$. Salvo isomorfismo, los únicos grupos de orden 4 son el grupo cíclico C_4 y el grupo de Klein V_4

Observando los órdenes calculados en el apartado anterior, vemos que el orden máximo de los elementos de $\text{Aut}(C_8)$ es 2. Al no existir ningún elemento de orden 4, el grupo no puede estar generado por un solo elemento y, por tanto, no es cíclico.

En conclusión, identificamos el grupo de automorfismos con el producto directo de dos grupos cíclicos de orden 2:

$$\text{Aut}(C_8) \cong V_4$$